සියලු ම හිමිකම ඇවිරිණි]
All Rights Reserved)

№ 136

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව/Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, අගෝස්තු 1990 (විශේෂ-1991)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1990 (Special-1991)

(01) ශුද්ධ ගණිතය I
(01) Pure Mathematics I

01	
S	I

පැ තුනයි/*Three hours*
ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. (i) $\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 - \left\{\frac{(n-1)n}{2}\right\}^2 \equiv n^3$

සහ

$\frac{1}{2}(n+\frac{1}{2})^3 - \frac{3}{8}(n+\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(n-\frac{1}{2})^3 - \frac{3}{8}(n-\frac{1}{2}) \equiv n^3$

සර්වසාම්‍ය සත්‍යාපනය කර

$$\sum_{r=1}^{n} r^3 \quad \text{සහ} \quad \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} r^3$$

සෙවීමට ඒවා භාවිත කරන්න.

(ii) ගණිත අභ්‍යුහනය පිළිබඳ මූලධර්මය භාවිත කර

$2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$

යන්න 54 හි ගුණාකාරයක් බව සාධනය කරන්න.

2. (i) a, b සහ c තාත්ත්වික නම්

$$(a^2 + b^2)x^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2)x + b^2 + c^2 = 0$$

සමීකරණයෙහි මූල තාත්ත්වික විය යුතු බව සාධනය කරන්න.

(ii) $ax^2 + bx + c = 0$ සහ $a'x^2 + b'x + c' = 0$ සමීකරණවල මූලවල අනුපාත සමාන නම්

$$\frac{b^2}{ac} = \frac{b'^2}{a'c'}$$

බව පෙන්වන්න.

(iii) $$\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+3} > \frac{3}{x+2}$$

අසමානතාව සපුරාලන x හි අගයන් සොයන්න.

3. (i) $f(x)$, සහ $g(x)$ වූ කලි $3x^2 + x - 2$ න් $f(x)$ බෙදූ විට ශේෂය $2x + 1$ ද $x^2 - 1$ න් $g(x)$ බෙදූ විට ශේෂය $x + 2$ ද වන පරිදි බහුපද දෙකකි.

$f(x) + g(x)$ බහුපදයේ ඒකජ සාධකයක් සොයා එම ඒකජ සාධකයෙන් $f(x)\,g(x)$ බෙදූ විට ශේෂය -1 බව සාධනය කරන්න.

(ii) $(x + y + z)^5 - x^5 - y^5 - z^5$ හි සාධක සොයන්න.

4. n ධන නිඛිල දර්ශකයක් සඳහා ද මුවාවර් ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න.
$z = \cos\theta + i\sin\theta$ නම්,

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta$$

බව පෙන්වන්න.
ඒ නයින් හෝ අන්ක්‍රමයකින් හෝ

$$\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$$

බව පෙන්වන්න.

(a) $\cos 5\theta = 0$ සමීකරණයේ මූල සලකා, $4\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{10} = \sqrt{5}$ බව පෙන්වන්න.

ඊ නයින්

$$\cos\frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$$

බව පෙන්වන්න.

(b) $\cos 5\theta = 5\cos\theta$ සමීකරණය සපුරාලන θ හි තාත්ත්වික අගයන් සියල්ල සොයන්න.

5. සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් සඳහා 'මාපාංකය' සහ 'විස්තාරය' යන පද අර්ථ දක්වන්න.
z_1, z_2 සහ $\left(\frac{3+\sqrt{3}\,i}{2}\right)z_2 - \left(\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)z_1$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවන් ආගන්ඩ් සටහනෙහි (වාමාවර්තව නම් කරන ලද) A, B සහ C ලක්ෂ්‍යවලින් පිළිවෙලින් නිරූපණය කරයි. ABC කෝණය 120° බව ද $AB = BC$ බව ද පෙන්වන්න.
$ABCDEF$ සවිධි ෂඩස්‍රයක් ද U එහි කේන්ද්‍රය ද නම් z_1 සහ z_2 මගින් E සහ U නිරූපණය කරන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න.
තම U කේන්ද්‍රය වටා ෂඩස්‍රය දක්ෂිණාවර්ත ව 45° කින් භ්‍රමණය කරනු ලබන්නේ නම් E හි නව පිහිටීම මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව z_1 සහ z_2 ඇසුරෙන් සොයන්න.

6. (i) "RELATIVISTIC" යන වචනයෙහි අකුරුවල පිළියෙළකිරීම් සංඛ්‍යාව සොයන්න.
ඊන් කවර සංඛ්‍යාවක "I" අක්ෂර තුන ම එකට පැමිණෙයි ද?
I අක්ෂර 2 ක් එකට ද තෙවැනි I අනෙක් 2 ට යාබදව නොවී ද ඇත්තේ, පිළියෙළ කිරීම් කවර සංඛ්‍යාවක ද ?

(ii) රිදී කාසි 8 ක් ද තඹ කාසි 4 ක් ද බෑගයක ඇත. මේවා සියල්ල එකිනෙකට වෙනස් වේ. වරකට 7 බැගින් කී ආකාරයකට කාසි තෝරා ගත හැකි ද? මේවායින් කවර සංඛ්‍යාවක අවම වශයෙන් එක් රිදී කාසියක් වත් ඇත් ද?

7. n ධන නිඛිලයක් විට, $(a + x)^n$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණය ලියා එය සාධනය කරන්න.
$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{12x^2}\right)^{15}$ හි ප්‍රසාරණයේ x ගෙන් ස්වායත්ත පදය ද $x = \frac{1}{4}$ වන විට විශාලතම පදය ද සොයන්න.

$$(1 + x)^4 (1 - x^2)^n \quad සහ \quad (1 - x)^n (1 + x)^{n+4}$$

ප්‍රසාරණවල x^{2r} $(n \geqslant 2r)$ හි සංගුණක සොයා

$$(-1)^r\,[\,nC_r - {}^{6n}C_{r-1} + {}^nC_{r-2}\,] = {}^nC_0\,{}^{n+4}C_{2r} - {}^nC_1\,{}^{n+4}C_{2r-1} + \ldots\ldots + {}^nC_{2r}\,{}^{n+4}C_0.$$

බව පෙන්වන්න.

8. (i) ප්‍රමූලධර්ම මගින් $\sqrt{1 - x^2}$ හි ව්‍යුත්පන්නය සොයන්න.

(ii) $y = \tan^{-1}\frac{1}{1 - x^2}$ සහ $z = \sin^{-1}x$ නම් $\frac{dy}{dz}$ සොයන්න.

(iii) $x = \sqrt{1 - z^2}$ ද x හි ශ්‍රිතයක් y ද වේ.
$\frac{dy}{dz}$ සහ $\frac{d^2y}{dz^2}$ මගින් $\frac{d^2y}{dx^2}$ ප්‍රකාශ කරන්න.

$$(1 - z^2)\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{1}{z}\frac{dy}{dz} + z^2y = 0 \quad නම්$$

$$x \neq 0 \text{ සඳහා } \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \text{ බව සාධනය කරන්න.}$$

9. (i) $x = \pi - y$ ආදේශ කිරීමෙන් $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx$ අනුකලය 0 සහ $\frac{\pi}{2}$ සීමා අතර අනුකලයකට පරිණාමනය කරන්න.

ඒ නයින්, $$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx = \frac{\pi^2}{4}$$ බව පෙන්වන්න.

(ii) m සහ n ධන නිඛිල වන විට,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin (2m + 1)\, x\, dx = (-1)^m \frac{n}{(2m + 1)^2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}$$

$$- \frac{n(n-1)}{(2m+1)^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n-2} \sin (2m + 1)x\, dx$$

බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^4 \sin 3x\, dx$$

අගයන්න.

10. (i) කෝටික අගයන් **පහක්** භාවිත කර (අ) ත්‍රපීසාභ නීතිය (ආ) සිම්සන් නීතිය යොදමින්

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\, dx$$

දශමස්ථාන 4 කට නිමානය කරන්න.

$x = \tan \theta$ ආදේශයෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\, dx$ අගයන්න. ඒ නයින් ඔබේ නිමාන අගයෙහි නිරවද්‍යතාව නිර්ණය කරන්න. ($\pi = 3.1416$ ලෙස ගන්න.)

(ii) මැක්ලෝරින් ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කර $|x| < 1$ විට $ln\,(1 + x)$ සඳහා ශ්‍රේණි ප්‍රසාරණයක් ලබා ගන්න. (සැ. යු. $ln = \log_e$)

y^{-4} පදය දක්වා y හි අවරෝහණ බලවල ශ්‍රේණියක් ලෙස $ln \frac{y}{y-1}$ ප්‍රසාරණය කර දශමස්ථාන හතරකට නිවැරදි ව $ln\, 1.25$ සෙවීමට එම ප්‍රසාරණය භාවිත කරන්න.

11. $x = 3t^2 + 1$
$y = 2t^3 - 1$

පරාමිතික සමීකරණවලින් නිරූපණය කෙරෙන වක්‍රයට $t = \tan \alpha$ වූ ලක්ෂ්‍යයෙහි දී ස්පර්ශකයේ සමීකරණය

$$y = x \tan \alpha - \tan^3 \alpha - \tan \alpha - 1$$

බව පෙන්වා වක්‍රය අනුරේඛනය කරන්න.

$t = 1$ ලක්ෂ්‍යයේ දී වක්‍රයට ස්පර්ශකයක් වන රේඛාව ද අනුරේඛනය කරන්න.

12. $y^2 = 16x$ සහ $3y = 4\,(4 - x^2)$ මගින් දෙනු ලබන වක්‍ර එක ම සටහනෙහි අනුරේඛනය කර පළමුවැනි වෘත්ත පාදය තුළ ඒවායේ ඡේදන ලක්ෂ්‍යය (1, 4) බව සත්‍යාපනය කරන්න.
පළමුවැනි වෘත්ත පාදය තුළ මෙම වක්‍ර දෙකෙන් හා x-අක්ෂයෙන් සපර්යන්ත වර්ගඵලය සොයන්න.
මෙම වර්ගඵලය (i) x-අක්ෂය වටා ද (ii) y-අක්ෂය වටා ද භ්‍රමණය කළහොත් ජනනය කෙරෙන පරිමාව සොයන්න.

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
All Rights Reserved]

№ 123

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව/**Department of Examinations, Sri Lanka**

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, අගෝස්තු 1990 (විශේෂ — 1991)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1990 (Special — 1991)

(01) ශුද්ධ ගණිතය II
(01) Pure Mathematics II

01
S | II

පැ තුනයි / *Three hours*

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. (i) ABC ත්‍රිකෝණයේ තලයෙහි ලක්ෂ්‍යයක් O වේ. AO, BO, CO රේඛා BC, CA, AB පිළිවෙළින් D, E, F හි දී හමු වේ.

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

බව පෙන්වන්න.

ඉහත ප්‍රතිඵලයේ විලෝමය ප්‍රකාශ කර එය භාවිත කර ත්‍රිකෝණයක උච්ච ඒකලක්ෂ්‍ය බව පෙන්වන්න.

(ii) A, B, C, D ලක්ෂ්‍ය වෘත්තයක් මත වේ. AB, BC, CA පාදවලට D සිට අඳින ලද ලම්බවල L, M, N අඩි සරල රේඛාවක් මත වන බව පෙන්වන්න.

2. $OABC$ චතුස්තලයක OA, OB, OC දර අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් ලම්බ වේ. $OA = a,\ OB = b$ සහ $OC = c$ නම්

$$\cos B\hat{A}C \ \cos C\hat{B}A \ \cos A\hat{B}C = \frac{a^2\, b^2\, c^2}{(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)(a^2 + b^2)}$$ බව සාධනය කරන්න.

චතුස්තලයේ OBC සහ ABC මුහුණත් අතර කෝණය θ නම්

$$\cos\theta = \frac{bc}{\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}}$$

බව පෙන්වන්න.

3. $ax + by + c = 0$ රේඛාව මත (x_1, y_1) ලක්ෂ්‍යයේ ප්‍රතිබිම්බය සොයන්න.

රොම්බසයක එක කෝණයක් 2α වන අතර මෙම කෝණය සමච්ඡේද කරන විකර්ණය $ax + by + c = 0$ $(c \neq 0)$ රේඛාව මත වේ. $(0, 0)$ මූල ලක්ෂ්‍යය එක් ශීර්ෂයක් නම් අනෙක් ශීර්ෂ තුනෙහි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

4. $A\,(2a, 0)$, $B\,(0, 2b)$ සහ $C\,(a + b,\ a + b)$ ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය හරහා යන වෘත්තය S වේ; මෙහි a සහ b ධන සංඛ්‍යා වේ. $P(2a, 2b)$ හරහා S යන බව පෙන්වන්න. B හි ද P හි ද වෘත්තයට ස්පර්ශක Q හි දී හමුවේ නම් $PQ = \frac{a}{b}\sqrt{a^2 + b^2}$ බව පෙන්වන්න.

S වෘත්තය බාහිරව ස්පර්ශ කරමින් $ax + by + c = 0$ $(c > 0)$ සරල රේඛාව ද ස්පර්ශ කරන වෘත්තයෙහි කේන්ද්‍රයේ පථය පරාවලයක් වන බව එහි නාභිය (a, b) ද නියාමකය $ax + by + c + a^2 + b^2 = 0$ ද බවත් පෙන්වන්න.

5. (i) ධ්‍රැවක සමීකරණ පිළිවෙළින් $r = 2a\cos\theta,\ \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ සහ $r = a\,(1 + \cos\theta)$, $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$ වන C_1 සහ C_2 වක්‍ර අනුරේඛනය කරන්න.

C_1 සහ C_2 ට පොදු වූ ලක්ෂ්‍යවල ධ්‍රැවක ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

(ii) එකම රූප සටහනෙහි, $x^2 + y^2 - 8 = 0$, $y^2 - 7 = 0$ සහ $y^2 - 7x = 0$ වක්‍ර ඒවායේ ඡේදන ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් අනුරේඛනය කරන්න.

xy තලයේ $(x^2 + y^2 - 8)(y^2 - 7x)(y^2 - 7) \leqslant 0$ වන R පෙදෙස අඳුරු කරන්න. R පෙදෙස තුළ $x^2 + y^2 - 8$ හි අවමය අගය සොයන්න. R හි දී $x^2 + y^2 - 8$ හි වැඩිතම අගය ගැන ඔබට කුමක් කිව හැකි ද?

6. $y^2 = 4ax$ පරාවලයේ $A_i\,(at_i^2, 2at_i)$ සහ $A_j\,(at_j^2, 2at_j)$ ලක්ෂ්‍යයන්හි දී ස්පර්ශකයන්ගේ ඡේදන ලක්ෂ්‍යක් වන A'_k හි ඛණ්ඩාංක

$$at_it_j,\ a(t_i + t_j) \quad (i, j, k = 1, 2, 3 \quad i \neq j \neq k)$$ වන බව පෙන්වන්න.

$A_2'A_3'$, $A_3'A_1'$ සහ $A_1'A_2'$ සමපාද ත්‍රිකෝණයක පාද නම් A_1A_1', A_2A_2', A_3A_3', අචල ලක්ෂ්‍යයක දී ඒකලක්ෂ්‍ය වන බව පෙන්වන්න.

7. ඉලිප්සයක ලක්ෂ්‍ය $(a \cos \theta,\ b \sin \theta)$ මගින් පරාමිතික ව නිරූපණය කළ හැකි බව පෙන්වන්න. ඉලිප්සයක අන්තර්ගත චතුරස්‍රයක $P_i\ (i = 1, 2, 3, 4)$ ශීර්ෂවලට පිළිවෙලින් $\theta_i\ (i = 1, 2, 3, 4)$ පරාමිති තිබේ. P_1P_2 සහ P_3P_4 සමාන්තර නම් $\theta_1 + \theta_2$ සහ $\theta_3 + \theta_4$ එක්කෝ සමාන වන බව නැතහොත් 2π වලින් වෙනස් වන බව පෙන්වන්න. P_1P_4 හා P_2P_3 යන එක් එක් රේඛාවට සමාන්තර ලෙස ඉලිප්සයට ස්පර්ශක යුගල ඇඳ තිබේ. ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍ය හතර සමාන්තරාස්‍රයක ශීර්ෂ වන බවත් ප්‍රතිමුඛ පාද යුගලයක් P_1P_2 රේඛාවට හෝ P_3P_4 රේඛාවට හෝ සමාන්තර වන බවත් පෙන්වන්න.

8. $xy = c^2$ සෘජුකෝණාස්‍ර බහුවලයට $P\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි දී අඳින ලද අභිලම්බයේ සමීකරණය සොයන්න.

P හි අභිලම්බය බහුවලය නැවත හමුවන Q ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න. PQ විෂ්කම්භයක් වන වෘත්තය C හි දී නැවත බහුවලය හමුවේ. PC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය මූලය බව පෙන්වන්න.

9. මතු දක්වෙන සමීකරණ විසඳා සාධාරණ ආකෘතියෙන් විසඳුම් දෙන්න.

(i) $39 \cos x + 52 \sin x = 60$

(ii) $\sin 3x - 2 \sin x = 4 \cos^2 x - 3$

(iii) $\cos x - \cos 2x = \frac{1}{2}$

10. සුපුරුදු අංකනය භාවිත කර ABC ත්‍රිකෝණයක $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ බව සාධනය කරන්න.

(i) ABC ත්‍රිකෝණයෙහි C ගෙන් ඈතින් ඇති පැත්තේ AB මත ABC_1 සමපාද ත්‍රිකෝණය ඇඳ ඇත.

$$CC_1^2 = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + 2\sqrt{3}\,\Delta$$

බව පෙන්වන්න; මෙහි ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය Δ වලින් දක්වා ඇත.

(ii) ABC ත්‍රිකෝණයක $a = 4$, $b = 3$ ද A සහ B හරහා මධ්‍යස්ථ අන්‍යොන්‍ය වශයෙන් ලම්බ ද වේ. $\cos C = \frac{5}{6}$ බව පෙන්වන්න.

11. (i) A සහ B නම් ගම් දෙකක ආදායම පිළිබඳ විස්තර පහත දක්වේ.

		A ගම	B ගම
මිනිසුන් සංඛ්‍යාව	...	600	500
මධ්‍යන්‍ය ආදායම	...	175	186
විචලතාව ...	...	100	81

(අ) ගම් දෙකම එකට ගත් කල මුළු ආදායම සොයන්න.

(ආ) ගම් දෙකම එකට ගත් කල මධ්‍යන්‍ය ආදායම සොයන්න.

(ඉ) සංයෝජිත සම්මත අපගමනය සොයන්න.

(ඊ) ආදායමෙහි විචලනය වඩා විශාල වන්නේ කවර ගමෙහි ද?

(ii) විචල්‍යයක පාඨාංක 50 ක මධ්‍යන්‍යය 7.43 ද සම්මත අපගමනය 0.28 ද විය. 6.80, 7.81, 7.58, 7.70, 8.05, 6.98, 7.78, 7.85, 7.21 සහ 7.40 අතිරේක පාඨාංක 10 ක් භාවිතා කිරීමට ලැබුනේ ය. මුල් පාඨාංකවලට මේවා ඇතුල් කරන ලද්දේ නම්, පාඨාංක 60 සහිත සම්පූර්ණ කුලකයේ

(අ) මධ්‍යන්‍යය,

(ආ) සම්මත අපගමනය

සොයන්න.

12. (i) සර්වසම නොනැඹුරු කාසි පහක් උඩ දමනු ලැබේ.

(අ) හරියට ම මුහුණු තුනක්

(ආ) අවම වශයෙන් මුහුණු **තුනක්**

උඩ අතට වැටීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(ii) නොනැඹුරු කැට දෙකක මුහුණතවල එකක එක බැගින් 2, 3, 4, 6, 8, 12 අංක ලකුණු කර ඇත. ඒවා එකවිටම උඩ දමනු ලැබුවහොත් උඩ අතට වැටෙන මුහුණතවල දක්නට ලැබෙන සංඛ්‍යාවල ගුණිතය 24 වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(iii) තුවක්කුකරුවෙකු ඉලක්කයකට වෙඩි තැබීමේ සම්භාවිතාව 5/6 වේ. ඔහු 20 වරක් වෙඩි තැබුවහොත් ඉලක්කයට වැදීමේ සම්භාවිතාව වැඩිම වන වාර ගණන සොයන්න.